

POLINOMIS

Lluís Bibiloni i Matos, Pelegrí Viader i Canals

Generalitats sobre polinomis

Designarem un polinomi genèric com

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Així, a_k sempre denotarà el coeficient del monomi de grau k . En principi els coeficients seran nombres reals (o complexos, encara que llavors s'acostuma a especificar aquesta circumstància). A la major part dels problemes, els coeficients acostumen a ser enters. Suposem conegudes les operacions algebraiques habituals, incloent la divisió entera de polinomis. És convenient repassar qüestions com les següents:

- Càlcul del *M.C.D.* de dos polinomis utilitzant l'algorisme d'Euclides.
- Mínim comú múltiple. Es pot calcular com el producte dels polinomis dividit pel màxim comú divisor.
- Concepte de polinomi irreductible.
- Avaluació d'un polinomi per un valor concret de la variable utilitzant el teorema del residu:

Teorema del residu.

El residu de dividir $P(x)$ per $x - a$ és $P(a)$.

La divisió és convenient fer-la pel mètode de Ruffini.

Alguns resultats interessants.

Suposem $a > 0$. Es compleixen les propietats

- $\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}$

- $\frac{x^n + a^n}{x - a}$ la divisió no és exacta.
- Si n és senar: $\frac{x^n + a^n}{x + a} = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots - a^{n-2}x + a^{n-1}$
- Si n és parell: $\frac{x^n + a^n}{x + a}$ la divisió no és exacta.
- Si n és parell: $\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}$.
- Si n és senar: $\frac{x^n - a^n}{x + a}$ la divisió no és exacta.

El cas $a = 1$ és de molta importància (Suma dels n primers termes d'una progressió geomètrica):

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1.$$

De passada, ja que som aquí, esmentem que

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (\text{sèrie infinita}). \text{ La igualtat val només si } |x| < 1.$$

D'aquí, per substitució directa s'obté (per $|x| < 1$):

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad (\text{signes alternats}).$$

$$\frac{1}{1 - x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$$

$$\frac{1}{1 - x^k} = 1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \dots$$

Arrels.

El Teorema Fonamental de l'Àlgebra ens diu que un polinomi de grau n té exactament n arrels, possiblement complexes. Si els coeficients del polinomi són nombres reals, les arrels complexes s'han de presentar de dues en dues ja que si $a + bi$ és arrel, $a - bi$ (el complex conjugat) també ho és. Això justifica el resultat següent: *un polinomi amb coeficients reals i grau imparell té almenys una arrel real*. Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ són les n arrels d'un polinomi de grau n , el polinomi admet la descomposició en factors lineals:

$$P(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n).$$

S'ha de parlar compte amb el a_n de davant de tot, és fàcil d'oblidar-lo. Si hi ha arrels múltiples, els factors iguals es poden ajuntar:

$$P(x) = a_n(x - \alpha_1)^{r_1}(x - \alpha_2)^{r_2} \cdot \dots \cdot (x - \alpha_s)^{r_s}.$$

Les arrels tenen tota una sèrie de relacions importants amb els coeficients, les anomenades fórmules de Cardano:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \cdots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n &= -\frac{a_{n-3}}{a_n} \\ &\dots \\ \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n},\end{aligned}$$

és a dir, la suma de tots els possibles productes de k arrels és exactament el coeficient de x^{n-k} dividit per a_n amb signe $(-1)^k$. Els primers membres d'aquestes relacions tenen la propietat de ser invariables per permutacions de les arrels. Són els anomenats *polinomis simètrics elementals*. Un resultat important i útil a l'hora de fer problemes és el teorema següent: *Qualsevol funció racional simètrica de les arrels d'un polinomi s'expressa com a funció racional dels coeficients i recíprocament*. A la pràctica, trobar l'expressió concreta d'una determinada funció simètrica de les arrels no és fàcil. Per exemple:

PL1.—Siguin a, b, c les arrels del polinomi $x^3 - 2x^2 + x + 5$. Trobeu el valor de $a^4 + b^4 + c^4$.

PL2.—(XXVII Olimpíada Espanyola.) Considereu l'equació $x^3 + px^2 + qx + r = 0, r \neq 0$, que suposem admet tres arrels reals i positives, a, b, c . Determineu la relació que ha de lligar els nombres p, q i r per tal que els tres nombres a, b, c puguin ésser les longituds dels costats d'un triangle. *Indicació.* Suposeu les arrels ordenades $a \geq b \geq c$ i expresseu la condició de poder formar triangle com una desigualtat que involucri una funció simètrica de a, b, c .

De les relacions de Cardano, l'última és la més útil. Ens diu que el producte de totes les arrels i a_n és igual al terme independent, amb el signe corresponent:

$$a_n \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n = (-1)^n a_0.$$

Si els coeficients del polinomi són enters, llavors aquesta última relació ens demostra que si α_k és una arrel entera del polinomi, ha de ser forzosament un dels divisors de a_0 amb signe $+$ o $-$. No és difícil deduir també que si α_k és una arrel fraccionària del polinomi, diguem p/q , llavors p ha de ser un divisor de a_0 (amb signe $+$ o $-$) i q ha de ser un divisor de a_n . En particular, si $a_n = 1$ el polinomi no pot tenir arrels fraccionàries.

No és difícil tampoc obtenir el resultats següents:

PL3.—Si $P(x)$ té coeficients enters i $P(0)$ i $P(1)$ són imparells, llavors el polinomi no té arrels enteres.

PL4.—Si cap dels nombres $P(-1), P(0), P(1)$ és múltiple de 3, el polinomi $P \in \mathbb{Z}[x]$ no té arrels enteres.

PL5.—Si un polinomi té una arrel de multiplicitat r , el polinomi derivat té també la mateixa arrel amb multiplicitat $r - 1$. Com a conseqüència, si un polinomi no té arrels múltiples, $\text{mcd}(P(x), P'(x)) = 1$.

Si α és arrel múltiple de $P(x)$ de grau n , també és arrel del polinomi $P - Q \cdot P'$ on $Q(x)$ és qualsevol polinomi. Un cas particular interessant és dona quan $Q(x) = x/n$ ja que aleshores el polinomi $P(x) - P'(x) \cdot (x/n)$ té grau $n - 1$.

Fitació de les arrels.

Hi ha moltes maneres de donar fites superiors de les arrels positives d'un polinomi. Una de senzilla i fàcil d'obtenir és la fita de MacLaurin: totes les arrels positives es mantenen inferiors al nombre $1 + N/a_n$ on N és el màxim valor absolut dels coeficients negatius. En general es compleix:

Regla de Laguerre-Thibault:

Si en dividir un polinomi per $x - L$, (on L és un nombre positiu) tots els coeficients del quocient i el residu són positius, L és una fita superior de les arrels del polinomi. Una manera pràctica de fer això és efectuar la divisió per Ruffini i observar que tots els signes del resultat són positius.

PL6.—Demostreu la Regla de Laguerre-Thibault i que la fita de MacLaurin és realment una fita superior de les arrels.

Regla de Descartes:

Si $P(x)$ té els coeficients reals, el nombre total d'arrels reals positives (comptant multiplicitat) és inferior o igual al nombre total de canvis de signe en els coeficients (se suposa el polinomi ben ordenat; si alguns coeficients són 0, no s'han de tenir en compte per a calcular el nombre de canvis de signe). De la mateixa manera, el nombre total d'arrels

reals negatives (comptant multiplicitat) és inferior o igual al nombre total de canvis de signe en els coeficients del polinomi $P(-x)$. En qualsevol cas, la diferència entre el nombre d'arrels i el nombre de canvis de signe és sempre un nombre parell. La Regla de Descartes només és útil en determinades condicions "extremes". Si no hi ha canvis de signe, llavors *segur* que no hi ha arrels positives; si només hi ha un canvi de signe *segur* que només hi ha una arrel positiva.

PL7.—Verifiqueu que el polinomi $x^{11} + x^8 - 3x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 2$ té com a màxim 5 arrels positives i 2 negatives. Demostreu que, com a mínim, té 4 arrels complexes.

Canvis de variable.

PL8.—Demostreu que si en un polinomi canviem x per:

- a) $-x$, les arrels canvien de signe.
- b) $x + a$, les arrels queden sumades per $-a$.
- c) βx , les arrels queden multiplicades per $1/\beta$.
- d) $1/x$, les arrels queden invertides.

(S'entén sempre que ens referim a la relació entre les arrels del nou polinomi i les del vell.)

Aquests últims resultats són força útils en molts problemes. Canviar la x per $x - a$ pot ser difícil en alguns casos, donat el càlcul que això representa. De vegades pot ser útil recordar el Teorema de Taylor:

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{P'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Si fem $a = 0$, trobem una manera interessant d'expressar els coeficients d'un polinomi: $a_k = P^{(k)}(0)/k!$

Polinomis especials.

PL9.—Els polinomis de la forma $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$ amb $a \neq 0$ s'anomenen polinomis recíprocs de quart grau. Demostreu

- a) Si α és arrel, $1/\alpha$ també ho és.
- b) Es poden trobar les arrels dividint tot el polinomi per x^2 i fent el canvi $y = x + 1/x$.

Els polinomis de la forma $x^n - 1$ són especialment importants. Les seves arrels són fàcils de trobar:

$$x = \sqrt[n]{1}$$

Utilitzant la radicació complexa tenim que les arrels són:

$$1, \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}, \cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n}, \dots, \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Aquests nombres complexos, tots de mòdul 1, constitueixen les arrels n -èsimes de la unitat. Si les dibuixem al pla complex, es distribueixen regularment sobre el cercle unitat i unint els extrems dels afixos corresponents obtenim un n -àgon regular. D'entre aquestes arrels n -èsimes de la unitat n'hi ha que tenen la propietat de "generar" totes les altres en el següent sentit: $\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3, \dots, \xi^{n-1}$ són totes les arrels n -èsimes de la unitat. Direm que ξ és una *arrel primitiva n -èsima de la unitat*. Per calcular potències d'una arrel de la unitat, feu servir la fórmula de Moivre:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^k = \cos k\theta + i \sin k\theta.$$

PL10.-

- a) Trobeu les arrels primitives sisenes de la unitat.
 b) Sigui $\zeta = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$. Demostreu que ζ^k és una arrel primitiva n -èsima de la unitat si i només si k i n son primers entre ells. *Suggeriment:* Si recordeu la funció $\varphi(n)$ (l'indicador d'Euler), podem dir que el nombre total d'arrels primitives n -èsimes de la unitat és $\varphi(n)$.

PL11.-Es defineix $\Phi_n(x)$ com el n -èsim polinomi ciclotòmic de la següent manera:

$$\Phi_n(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \cdots (x - \xi_{\varphi(n)})$$

on $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\varphi(n)}$ són totes les arrels primitives n -èsimes de la unitat. Comproveu que

- a) $\Phi_2(x) = x + 1$
 b) $\Phi_3(x) = x^2 + x + 1$
 c) $\Phi_4(x) = x^2 + 1$
 d) $\Phi_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

e) $\Phi_6(x) = x^2 - x + 1$

Conjectureu com serà $\Phi_p(x)$ si p és primer i demostreu la vostra conjectura.

Tots els polinomis ciclotòmics són irreductibles sobre els enters o els racionals, és a dir, no admeten descomposicions en factors de grau més petit amb coeficients racionals.

Problemes diversos.

PL12.—Demostreu que la mitjana geomètrica de dos nombres és sempre menor o igual que la seva mitjana aritmètica.

PL13.—(Olimpiada Austríaca) Trobeu tots els enters positius n pels quals l'equació de segon grau

$$a_{n+1}x^2 - 2x\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n+1}^2} + (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = 0$$

té arrels reals per a qualssevol nombres reals $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$.

PL14.—(Olimpiada Russa, Leningrad) Siguin P_1, P_2 i P_3 polinomis de segon grau amb coeficient principal positiu i arrels reals. Demostreu que, si cada parell d'ells té una arrel comuna, llavors el polinomi $P_1 + P_2 + P_3$ té també arrels reals.

PL15.—(Mathematics Magazine) Demostreu que el polinomi $x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4$ no té arrels negatives.

PL16.—Si les arrels del polinomi $x^3 + ax^2 + bx + c$ estan

a) en progressió aritmètica, demostreu que $2a^3 - 9ab + 27c = 0$.

b) en progressió geomètrica, demostreu que $a^3c = b^3$.

PL17.—(Olimpiada Internacional) Demostreu que

$$\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

PL18.—(Olimpiada Internacional) Siguin a i b nombres reals pels quals l'equació

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

Polinomis

té almenys una solució real. Per a tots aquests parells (a, b) , trobeu el mínim valor de $a^2 + b^2$.

PL19.—Calculeu la suma

$$1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^{n-1}.$$

PL20.—(XXIV Olimpíada Catalana.) Demostreu que per a qualsevol polinomi $p(x)$ existeix un nombre real k tal que un dels dos polinomis $p(x) + k$ i $xp(x) + k$ no té cap arrel real i l'altre en té només una.

PL21.—Inscriuim un heptàgon regular en el cercle de radi unitat. Demostreu que la longitud del costat és una arrel del polinomi $x^6 - 7x^4 + 14x^2 - 7$.

PL22.—El producte de dues de les quatre arrels de

$$x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984$$

és -32 . Determineu k .

PL23.—Demostreu que tot polinomi té un múltiple polinomial no zero (és a dir el polinomi multiplicat per un altre polinomi), els exponents del qual són tots divisibles per 1000000.

Mostra de solucions

Solució del problema PL1

L'expressió $a^4 + b^4 + c^4$ és una funció simètrica de les arrels, per tant es pot expressar com a funció dels coeficients. Si a és arrel del polinomi $x^3 - 2x^2 + x + 5$ s'ha de complir que $a^3 - 2a^2 + a + 5 = 0$. Així, si dividim a^4 entre $a^3 - 2a^2 + a + 5$ tindrem

$$a^4 = (a + 2)(a^3 - 2a^2 + a + 5) + 3a^2 - 7a - 10 = 3a^2 - 7a - 10.$$

Igualment

$$b^4 = 3b^2 - 7b - 10,$$

i

$$c^4 = 3c^2 - 7c - 10.$$

O sigui que

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 &= 3a^2 - 7a - 10 + 3b^2 - 7b - 10 + 3c^2 - 7c - 10 = \\ &= 3(a^2 + b^2 + c^2) - 7(a + b + c) - 30. \end{aligned}$$

Ara,

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc)$$

i, per les relacions de Cardano,

$$a + b + c = 2, \quad ab + ac + bc = 1$$

i tenim

$$a^4 + b^4 + c^4 = 3 \cdot (2^2 - 2 \cdot 1) - 7 \cdot 2 - 30 = -38.$$

Solució del problema PL18

Tenim una equació recíproca de 4rt grau. Dividint per x^2 i fent el canvi $y = x + 1/x \Leftrightarrow x^2 - yx + 1 = 0$ que per a què x sigui real ha de complir $y^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |y| \geq 2$. Després del canvi ens trobem amb $y^2 + ay + b - 2 = 0$ que proporciona

$$y = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4(b-2)}}{2}.$$

Però $|y| \geq 2 \Rightarrow |a| + \sqrt{a^2 - 4(b-2)} \geq 4$. D'aquí traiem $8|a| \geq 8 + 4b$. Simplificant, elevant al quadrat i sumant $4b^2$ als dos costats obtenim $4a^2 + 4b^2 \geq 5b^2 + 4b + 4$ d'on

$$a^2 + b^2 \geq \frac{5}{4}(b^2 + \frac{4}{5}b + \frac{4}{5}) = \frac{5}{4}(b + \frac{2}{5})^2 + \frac{4}{5}.$$

El mínim del segon membre es dona quan $b = -2/5$ i val exactament $4/5$.

Solució del problema PL19

$$\begin{aligned} 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1} &= \frac{d}{dx}(x + x^2 + \dots + x^n) = \\ &= \frac{d}{dx} \frac{x^{n+1} - x}{x - 1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Polinomis

Substituint x per 2, obtenim la suma desitjada: $2^n(n-1)+1$.

Solució del problema PL21

El costat de l'heptàgon és $2 \sin \pi/7$. Aplicant la fórmula de De Moivre:

$$\left(\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}\right)^7 = \cos \pi + i \sin \pi$$

Igualant parts imaginàries, tenim:

$$-64 \sin^7 \frac{\pi}{7} + 112 \sin^5 \frac{\pi}{7} - 56 \sin^3 \frac{\pi}{7} + 7 \sin \frac{\pi}{7} = 0.$$

Ara només cal substituir $\sin \frac{\pi}{7}$ per $l/2$.